E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme M

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

N.B. — *Les candidats sont priés de respecter les notations du texte. La rigueur des démonstrations sera un élément essentiel d'appréciation et les références à des calculs non reportés sur les copies ne seront pas prises en considération. Les candidats peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.*

Dans tout le problème F désigne un espace vectoriel hermitien de dimension $n \geqslant 1$.

L'anneau des endomorphismes de F est noté $\mathcal{L}(F)$, et la composée de deux éléments u et v de $\mathcal{L}(F)$ est notée $u \circ v$. L'application unité $x \longmapsto x$ est notée I.

Le produit scalaire hermitien de deux éléments x et y de F est noté $< x, y >$. A ce produit scalaire hermitien est associé une norme donnée pour tout élément x de F par la formule $|| x || = < x, x >^{1/2}$.

Si M est une partie non vide de F, l'orthogonal de M est l'ensemble $M^{\perp} = \{ x \in F \mid \forall y \in M, < x, y > = 0 \}$. On rappelle que si $u \in \mathcal{L}(F)$ il existe un unique élément u^* de $\mathcal{L}(F)$ vérifiant

$$\forall x \in F, \forall y \in F \qquad < u(x), y > = < x, u^*(y) >$$

L'anneau des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'adjointe A^* de A

est la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la transposée de A.

Autrement dit $A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{n,1}} \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{n,n}} \end{bmatrix}$

Les notions de matrice hermitienne et unitaire sont celles figurant au programme du concours.

Un élément u de $\mathcal{L}(F)$ sera dit respectivement

i. normal si et seulement si $u^* \circ u = u \circ u^*$

ii. unitaire si et seulement si $|| u(x) || = || x ||$ pour tout $x \in F$

iii. hermitien si et seulement si $< u(x), x >$ est réel pour tout $x \in F$

iiii. positif si et seulement si $< u(x), x >$ est un réel positif ou nul pour tout $x \in F$.

Les candidats pourront utiliser sans démonstration le résultat suivant :

(S) Pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$, il existe une famille finie $F_1, \ldots F_k$ de sous-espaces vectoriels de F, une famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de nombres complexes et une famille $(p_1, \ldots, p_k)$ d'entiers positifs telles que $F = F_1 + F_2 \ldots + F_k$, $u(F_i) \subset F_i$ et $(u - \lambda_i I)^{p_i}(x) = 0$ pour tout $i \leqslant k$ et pour tout $x \in F_i$.

I

Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $\mathrm{Re}\, z$ la partie réelle de z et $\mathrm{Im}\, z$ la partie imaginaire de z. On pose :

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{où} \quad x = \mathrm{Re}\, z, \; y = \mathrm{Im}\, z$$

1° Soit m un entier positif ou nul.

Calculer $\cos \frac{m\pi}{2} + i \sin \frac{m\pi}{2} - i^m$

2° Soit n un entier positif ou nul, et soient θ et t deux réels.

Donner une expression simple de :

.../...

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (\cos\theta)^p (\sin\theta)^{n-p} \cos\left[(n-p)\frac{\pi}{2}\right]$$

et $$\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (\cos\theta)^p (\sin\theta)^{n-p} \sin\left[(n-p)\frac{\pi}{2}\right]$$

3° Soit θ un réel fixé. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = e^{t\cos\theta} \cdot \cos(t \sin\theta)$$

$$g(t) = e^{t\cos\theta} \cdot \sin(t \sin\theta)$$

a. Calculer $f^{(n)}(t)$ et $g^{(n)}(t)$ pour $n \geqslant 0$, en utilisant la formule de Leibnitz.

b. En utilisant la formule de Taylor Lagrange, montrer que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \cos n\theta}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin n\theta}{n!}$$

convergent pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \cos n\theta}{n!}$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sin n\theta}{n!}$$

4° Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

II

On rappelle que F désigne un espace vectoriel hermitien de dimension $n \geqslant 1$. La norme F est celle définie plus haut à partir du produit scalaire hermitien de F.

1° On pose, pour $u \in \mathcal{L}(F)$

$$|||u||| = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||u(x)||$$

Montrer que $|||u||| = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{||u(x)||}{||x||}$

2° *a.* Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}(F)$.

b. Vérifier que $|||I||| = 1$ et que $|||u \circ v||| \leqslant |||u||| \cdot |||v|||$ pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(F)$.

3° Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(F)$ et soit $u \in \mathcal{L}(F)$. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ dans l'espace normé $\mathcal{L}(F)$ alors $v \circ u_n \circ w \xrightarrow[n\to\infty]{} v \circ u \circ w$ pour tout $v \in \mathcal{L}(F)$ et pour tout $w \in \mathcal{L}(F)$.

4° Montrer que $|||u^* \circ u||| = |||u|||^2$ pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$.

.../...

5° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$

a. Vérifier que $(u^*)^* = u$

b. Montrer que $|||\, u \,||| = |||\, u^* \,|||$

6° *Application numérique :*

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ dont les éléments sont notés $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n éléments fixés de C, et soit v l'endormorphisme de $\mathbf{C}^n$ défini pour tout élément $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathbf{C}^n$ par la formule

$$v(X) = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

On munit $\mathbf{C}^n$ du produit scalaire défini pour deux éléments quelconques

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ de $\mathbf{C}^n$ par la formule : $< X, Y > = \sum_{p=0}^{n} x_p \cdot \overline{y_p}$

Calculer $|||\, v \,|||$

7° *Application numérique :*

On reprend les notations du 6° avec $n = 2$. Soit w l'élément de $\mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$ défini pour tout élément $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbf{C}^2$ par la formule : $w(X) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sqrt{2} x_2 \end{bmatrix}$

Calculer $|||\, w \,|||$

III

1° Vérifier les propriétés suivantes

$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \forall \mu \in \mathbf{C}, \forall u \in \mathcal{L}(F), \forall v \in \mathcal{L}(F)$

$(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda}\, u^* + \overline{\mu}\, v^*$

$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

2° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$ tel que $< u(x), x > = 0$ pour tout $x \in F$

a. Montrer que $< u(x), y > + < u(y), x > = 0$

$\forall x \in F, \forall y \in F$

b. Montrer que $u = 0$.

3° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$

a. Montrer que si $u = u^*$ alors u est hermitien.

b. Montrer réciproquement que si u est hermitien alors $u = u^*$

4° Montrer que $u^* \circ u$ est positif pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$.

.../...

5° Soit u un élément de $\mathcal{L}$ (F)

a. Montrer que si u est unitaire alors

$$< x, x > = < u^* \circ u(x), x > \text{ pour tout } x \in F$$

Calculer $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$

b. Montrer réciproquement que si $u^* \circ u = I$ alors u est unitaire.

6° Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, soit $u \in \mathcal{L}$ (F) et soit A la matrice représentant u par rapport à B.

a. Quelle est la matrice représentant u^*?

b. Que peut-on dire de A si u est normal?

Même question si u est hermitien, ou si u est unitaire.

7° L'élément R de $\mathcal{L}$ ($\mathbb{C}^2$) défini au II, 7° est-il normal? (le produit scalaire hermitien considéré est celui du II, 6°).

IV

Dans toute cette partie u désigne un élément normal de $\mathcal{L}$ (F), *c'est-à-dire vérifiant* $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1° Montrer que $||u(x)|| = ||u^*(x)||$ pour tout $x \in F$.

2° Montrer que $u - \lambda I$ est normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

3° Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $F_\lambda = \{ x \in F \mid u(x) = \lambda x \}$ et $G_\lambda = \{ x \in F \mid u^*(x) = \lambda x \}$

Montrer que $F_\lambda = G_{\bar{\lambda}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

4° Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $u(H) \subset H$, $u^*(H) \subset H$.

Montrer que $u(H^\perp) \subset H^\perp$, $u^*(H^\perp) \subset H^\perp$.

5° Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de u. On pose $H = (F_{\lambda_1} + F_{\lambda_2} \ldots + F_{\lambda_r})^\perp$

Montrer que $H = \{ 0 \}$.

6° Montrer que si $i \neq j$ alors $F_{\lambda_i} \subset (F_{\lambda_j})^\perp$.

7° Montrer qu'il existe une base orthonormée de F formée de vecteurs propres de u.

8° *Application numérique :*

On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire hermitien défini au II.6°. Soit ρ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule : $\rho(X) = \begin{bmatrix} (i+2)x_1 + (i-2)x_2 \\ (i-2)x_1 + (i+2)x_2 \end{bmatrix}$

a. Montrer que ρ est normal.

b. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2) de $\mathbb{C}^2$ pour laquelle ρ est représenté par une matrice diagonale que l'on calculera.

V

Si $u \in \mathcal{L}$ (F), et si n est un entier positif on pose

$$u^n = \underbrace{u \circ u \ldots\ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$$

.../...

On pose par convention $u^0 = I$. L'espace $\mathcal{L}(F)$ est muni de la norme définie au II.

1° Montrer que la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|||\, u^m \,|||}{m!}$ est convergente pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$.

2° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$. On pose, pour $n \geqslant 1$.

$$v_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}$$

Montrer que $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(F)$. En déduire qu'elle converge dans $\mathcal{L}(F)$.

Dans toute la suite on pose, pout tout $u \in \mathcal{L}(F)$,

$$\exp u = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}$$

3° Soient $u, v \in \mathcal{L}(F)$ tels que $u \circ v = v \circ u$

a. Établir l'inégalité

$$|||\left[\sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}\right] \circ \left[\sum_{m=0}^{n} \frac{v^m}{m!}\right] - \sum_{m=0}^{n} \frac{(u+v)^m}{m!}|||$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{(|||\, u \,||| + |||\, v \,|||)^m}{m!}$$

b. En déduire que $\exp(u+v) = (\exp u) \circ (\exp v)$

4° Montrer que l'application $u \to u^*$ est une application continue de l'espace normé $\mathcal{L}(F)$ dans lui-même.

5° Montrer que $\exp(u^*) = (\exp u)^*$ pour tout $u \in \mathcal{L}(F)$.

6° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$.

a. Établir pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'inégalité

$$|||\frac{\exp(tu) - I}{t} - u||| \leqslant \frac{e^{|t| \cdot |||u|||} - 1}{|t|} - |||\, u \,|||$$

b. Calculer $\lim_{t \to 0} \frac{\exp(tu) - I}{t}$

7° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$ et soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $x \in F$ vérifiant $u(x) = \lambda x$

Monter que $(\exp u)(x) = e^{\lambda}.x$

8° *Application numérique :*

a. Donner la matrice de $\exp w$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^2$ où w est l'endomorphisme défini au II.7°.

b. Même question pour $\exp \rho$ où ρ est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ défini au IV. 8°.

.../...

VI

1° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$ et soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $u^p(x) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Donner un équivalent de $|| \exp(i\,t\,u)\,(x) ||$ quand $t \to +\infty$ (t étant réel).

2° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$ tel que la fonction d'une variable réelle $t \to ||| \exp(i\,t\,u) |||$ soit bornée sur R.

a. u est-il nécessairement diagonalisable?

b. Que peut-on dire des valeurs propres de u?

3° Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'application $t \to ||| \exp(i\,t\,u) |||$ soit bornée sur R.

4° Caractériser l'ensemble des éléments u de $\mathcal{L}(F)$ vérifiant $\exp u = I$.

5° *Application numérique :*

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout élément $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule.

$$u(X) = \begin{bmatrix} 14\,\pi\,x_1 - 8\,\pi\,x_2 \\ 24\,\pi\,x_1 - 14\,\pi\,x_2 \end{bmatrix}$$

Calculer $\exp(i\,t\,u)$ pour $t \in R$ et montrer que

$$1 < \sup_{t \in R} ||| \exp(i\,t\,u) ||| < +\infty.$$

VII

1° Soit u un élément hermitien de $\mathcal{L}(F)$.

Montrer que $\exp(i\,t\,u)$ est unitaire pour tout $t \in R$.

2° Soit v un endomorphisme unitaire de $\mathcal{L}(F)$.

Montrer qu'il existe un endomorphisme hermitien u de F tel que $\exp(i\,u) = v$.

L'endomorphisme u est-il unique?

3° Soit $u \in \mathcal{L}(F)$. On suppose que $||| \exp(i\,t\,u) ||| \leqslant 1$ pour tout $t \in R$.

a. Montrer que $\exp(i\,t\,u)$ est unitaire pour tout $t \in R$.

b. Montrer que u est normal (on pourra utiliser V.6°).

c. Montrer que u est en fait hermitien.

4° *Application numérique :*

On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout élément $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule :

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-x_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Vérifier que Φ est unitaire. Trouver un élément hermitien u de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tel que $\exp(i\,u) = \Phi$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail